آزمون جامع «۱»

۱. گزینه‌ی (۴)

با اضافه و کم کردن عدد ۳ عبارت مخرج را می‌سازیم و تفکیک می‌کنیم.

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{3x-3+3}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{3(x-1)}{\sqrt{x-1}}dx + \int \frac{3}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$= \int 3\sqrt{x-1}\,dx + \int \frac{3}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{3(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{3(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2(x-1)\sqrt{x-1} + 6\sqrt{x-1} + c = (2x+4)\sqrt{x-1} + c$$

۲. گزینه‌ی (۲)

$$\int \frac{x^2-2x+5}{(x-1)^2}dx = \int \frac{x^2-2x+1+4}{(x-1)^2}dx = \int \frac{(x-1)^2+4}{(x-1)^2}dx$$

$$= \int (1+4(x-1)^{-2})dx = x + 4\times(-1)\times(x-1)^{-1}$$

$$= x - \frac{4}{x-1} = \frac{x^2-x-4}{x-1} + c \Rightarrow f(x) = -x-4$$

۳. گزینه‌ی (۴)

$$\int_0^1 \sqrt{x^3\sqrt{x}}\,dx = \int \sqrt{\sqrt{x^6 x}}\,dx = \int \sqrt[4]{x^7}\,dx = \int x^{\frac{7}{4}}dx$$

$$= \frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}}\Big]_0^1 = \frac{4}{11}$$

۴. گزینه‌ی (۳)

کافی است عدد ۲ را اضافه و کم کنیم تا داشته باشیم:

$$\int (\tan^2 x + \cot^2 x + 2 - 2)dx$$

$$= \int (\underbrace{1+\tan^2 x} + \underbrace{1+\cot^2 x} - 2)dx = \tan x - \cot x - 2x + c$$

۵. گزینه‌ی (۱)

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x \Rightarrow = \int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx$$

$$= \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)}dx = \int (1+\cos x)dx = x + \sin x + c$$

۶. گزینه‌ی (۴)

ابتدا با استفاده از انتگرال فرم کلی تابع اولیه‌ی $f(x) = 2x-4$ را به دست می‌آوریم:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

$$F(x) = \int (2x-4)dx = x^2 - 4x + c$$

خط $y = 5-2x$ بر منحنی $F(x) = x^2-4x+c$ مماس است بنابراین معادله‌ی تقاطع آن‌ها دارای ریشه‌ی مضاعف است.

$$x^2-4x+c = 5-2x \Rightarrow x^2-2x+c-5 = 0 =$$

ریشه‌ی مضاعف $\Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow (-1)^2 - 1(c-5) = 0$

$\Rightarrow 1-c+5 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow$ عرض محل تلاقی F با محور yها $= 6$

۷. گزینه‌ی (۲)

$$\int_1^2 (1-\frac{1}{x})^2 dx = \int_1^2 (1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})dx$$

$$= \int_1^2 (1-2(\frac{1}{x})+x^{-2})dx = x - 2\mathrm{Ln}x - \frac{1}{x}\Big]_1^2$$

$$= (2-2\mathrm{Ln}2-\frac{1}{2}) - (1-2\mathrm{Ln}1-1) \xrightarrow{\mathrm{Ln}1=0}$$

$$\frac{3}{2} - \mathrm{Ln}2^2 = \frac{3}{2} - \mathrm{Ln}4$$

۸. گزینه‌ی (۱)

$$\frac{\pi}{x} = u \Rightarrow \frac{-\pi}{x^2} = u'$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\sin\frac{\pi}{x}dx = \frac{-1}{\pi}\int \frac{-\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x}dx = \frac{-1}{\pi}(-\cos\frac{\pi}{x})\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{\pi}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi) = \frac{1}{\pi}(0-(-1)) = \frac{1}{\pi}$$

۹. گزینه‌ی (۲)

$$f(x) = \int_2^x \frac{dt}{t^2-1} \qquad g(x) = \sqrt{x^2+5}$$

$$(gf)'(x) = g'(x)f(x) + f'(x)g(x)$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} \times \int_2^x \frac{dt}{t^2-1} + 1\times\frac{1}{x^2-1}\times\sqrt{x^2+5}$$

$$= \frac{2}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times 3 = 1$$

۱۰. گزینه‌ی (۱)

$$\frac{-\pi}{2} \le x \le \pi \Rightarrow \frac{-\pi}{2} \le x < 0 \xrightarrow{0\le\cos x<1} [\cos x] = 0$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{0<\cos x\le 1} [\cos x] = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \to [\cos x] = -1$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\cos x]\sin x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin x dx = \cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \cos\pi - \cos\frac{\pi}{2} = -1-0 = -1$$

۱۱. گزینه‌ی (۲)

از طرفین مشتق می‌گیریم.

$$g(2x) = \int_1^{\sin x} \frac{dt}{t^2+1}$$

$$2g'(2x) = \cos x \times \frac{1}{\sin^2 x + 2} \Rightarrow g'(2x) = \frac{\cos x}{2(\sin^2 x+2)}$$

$$\xrightarrow{x=\pi} \frac{\cos\pi}{2(\sin^2\pi+2)} = \frac{-1}{4}$$

۱۲. گزینه‌ی (۴)

اگر عبارت $2x^4+1$ برابر u در نظر بگیریم، برای ساختن u' در صورت که $8x^3$ است کافی است عبارت را در ۸ ضرب و تقسیم کنیم.

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(2x^4+1)^2}dx = \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{8x^3dx}{(2x^4+1)^2}$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \underbrace{8x^3}_{u'}(\underbrace{2x^4+1}_{u})^{-2}dx = \frac{1}{8}\times(-1)\times\frac{1}{(2x^4+1)}\Big]_0^1$$

$$= \frac{-1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

۱۳. گزینه‌ی (۳)

نکته: برای تعیین مساحت بین دو منحنی ابتدا نقاط برخورد آن‌ها را تعیین می‌کنیم و سپس با توجه به نقاط برخورد از تفاضل دو تابع انتگرال می‌گیریم.

$$\begin{cases} y_1 = (x-1)^2 \\ y_2 = \cos\frac{\pi}{2}x \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 = \cos\frac{\pi}{2}x \to x=0, x=1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (\cos\frac{\pi}{2}x - (x-1)^2)\,dx = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}(x-1)^3]_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$$

۱۴. گزینه‌ی (۲)

با توجه به شکل و اینکه انتگرال مفهوم مساحت زیر منحنی را در خود دارد، خواهیم داشت:

$$\int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (x-2)^2dx = \frac{1}{3}x^3]_0^1 + \frac{1}{3}(x-1)^3]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + (0 + \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

۱۵. گزینه‌ی (۳)

$$\int_{-2}^1 [x]xdx = \int_{-2}^{-1} -2xdx + \int_{-1}^0 -xdx + \int_0^1 0\,dx$$

$$= -2\times\frac{1}{2}x^2]_{-2}^{-1} + (-\frac{1}{2}x^2)]_{-1}^0 = (-1+4) + (\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$$

آزمون جامع «۲»

۱. گزینه‌ی (۲)

$$\int(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})dx = \int(x^{-2} - x^{-3})dx = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x^2}$$

$$= \frac{-2x+1}{2x^2} = \frac{\frac{1}{2}(-2x+1)}{x^2} \Rightarrow \frac{-x+\frac{1}{2}}{x^2} = \frac{Ax+B}{x^2}$$

$$\Rightarrow Ax + B = -x + \frac{1}{2}$$

۲. گزینه‌ی (۴)

$$\int\frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^{\frac{-2}{3}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\times 3\times(2x+1)^{\frac{1}{3}} + c = \frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{3}} + c \Rightarrow A = \frac{3}{2}$$

۳. گزینه‌ی (۳)

$$\int(\underline{x} + \underline{\cos x} - \underline{\underline{x\sin x}} - \underline{\underline{\sin x\cos x}})dx$$

$$= \int(x(1-\sin x) + \cos x(1-\sin x))\,d$$

$$= \int(\underbrace{1-\sin x}_{u'})(\underbrace{x+\cos x}_{u})\,dx = \frac{1}{2}(x+\cos x)^2 + c$$

۴. گزینه‌ی (۲)

$1+\cos^3 x$ را با استفاده از اتحاد تجزیه می‌کنیم:

$$\int\frac{1+\cos^3 x}{1-\cos x+\cos^2 x}dx = \int\frac{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}{(1-\cos x+\cos^2 x)}dx$$

$$= \int(1+\cos x)dx = x + \sin x + c$$

۵. گزینه‌ی (۲)

$$f(x) \text{ تابع اولیه‌ی } : F(x) = \int(3x^2 - 2x - 5)dx$$

$$= x^3 - x^2 - 5x + c$$

$$x = 0 \to \underline{c = 3} \Rightarrow F(x) = x^3 - x^2 - 5x + 3$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 0 \quad \Delta = 64$$

$$x = \frac{2\pm 8}{6} \begin{cases} \frac{5}{3} \\ -1 \end{cases}$$

	-1		$\frac{5}{3}$	
$+$	0	$-$	0	$+$
↗		↘		↗

$\max : x = -1 \Rightarrow F(-1) = 6$ نسبی

۶. گزینه‌ی (۴)

$$(f(\frac{1}{\cos x}))' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\times f'(\frac{1}{\cos x}) \quad ①$$

$$f'(x) = 1\times\frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow f'(\frac{1}{\cos x}) = \frac{\frac{2}{\cos x}}{1-\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}} = \frac{2\cos x}{-\sin^2 x} \quad ②$$

$$①, ② \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x}\times\frac{2\cos x}{-\sin^2 x} = \frac{-2}{\cos x\sin x} \xrightarrow{x=\pi}$$

$$\frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$$

۷. گزینه‌ی (۳)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx$$

نکته: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2(\frac{\pi}{4}-2x)}{\sin(\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4})}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-2x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\,dx$$

$$= -2\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2} + 2 = 2 - \sqrt{2}$$

۸. گزینه‌ی (۲)

$$\int_1^4 [\frac{2x}{3}]dx$$

$$\xrightarrow{k=0} 0$$

$$\frac{2x}{3} = k \Rightarrow x = \frac{3k}{2} \xrightarrow{k=1} \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{k=2} \frac{6}{2} = 3$$

$$\xrightarrow{k=3} \frac{9}{2}$$

$$= \int_{1}^{\frac{3}{2}} 0\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} 1\,dx + \int_{3}^{4} 2\,dx$$

$$1 < x < \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2} < x < 3 \qquad 3 < x < 4$$

$$\frac{2}{3} < \frac{2x}{3} < 1 \qquad 1 < \frac{2x}{3} < 2 \qquad 2 < \frac{2x}{3} < \frac{8}{3}$$

$$= 1(3 - \frac{3}{2}) + 2(4-3) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} = 3/5$$

۹. گزینه‌ی (۱)

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{2t-2}{3t-1}dt$$

$$F'(x) = 1 \times \frac{2x-2}{3x-1} \Rightarrow F''(x) = \frac{2(-1)-(-2)(3)}{(3x-1)^2} = \frac{4}{(3x-1)^2}$$

$$F''(2) = \frac{4}{25} \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

۱۰. گزینه‌ی (۴)

هرگاه در صورت چند جمله و در مخرج ۱ جمله داشتیم، بهترین راه تفکیک است.

$$\int_{1}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^4}dx = \int_{1}^{2} \frac{x^2-2x+1}{x^4}dx$$

$$= \int_{1}^{2} (x^{-2} - 2x^{-3} + x^{-4})\,dx = \frac{-1}{x} - 2 \times \frac{-1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$$

$$= \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x^3}]_1^2 = (\frac{-1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24}) - (-1+1-\frac{1}{3})$$

$$= \frac{-7}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

۱۱. گزینه‌ی (۴)

$$\int_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^x}dx \Rightarrow \text{می‌دانیم}: \int \frac{u'}{u}dx = Ln|u|$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^x}dx = Ln|1+e^x|]_0^1 = Ln|1+e| - Ln|2|$$

$$= Ln(\frac{1+e}{2})$$

۱۲. گزینه‌ی (۳)

$$\int_{0}^{1} \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{2t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}Ln(t^2+1)]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}Ln2 - \underbrace{\frac{1}{2}Ln1}_{0} = \frac{1}{2}Ln2$$

۱۳. گزینه‌ی (۳)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x)\,dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1 + 2\sin x\cos x)\,dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin^2 x\,dx$$

$$= -\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \times \frac{1}{3}\sin^3 x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{2}{3}(1-(-1)) = \frac{4}{3}$$

۱۴. گزینه‌ی (۳)

ابتدا باید نقطه‌ی برخورد دو منحنی را به دست آوریم:

$$\frac{1}{x^2} = x \Rightarrow x = 1$$

مساحت خواسته شده: $\int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{\alpha} \frac{1}{x^2}dx = \frac{x^2}{2}]_0^1 + \frac{-1}{x}]_1^\alpha$

$$= \frac{1}{2} + (\frac{-1}{\alpha} - (-1)) = S_\alpha$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} S_\alpha = \lim_{\alpha\to\infty} (\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha}) = \frac{3}{2}$$

۱۵. گزینه‌ی (۱)

سطح زیر منحنی همان انتگرال تابع است اما ابتدا نقاط برخورد تابع با محور xها را به دست می‌آوریم.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin x \Rightarrow \sin x = 0 \to x = \pi, 2\pi$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x\,dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin x\,dx + \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= 1+1+1+1 = 4$$

نکته: مساحت $\sin x$ در هر ربع ۱ می‌باشد و یا از راه پاسخ انتگرال $(-\cos x)$ محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{a}{2} = 4 \Rightarrow a = 8$$

آزمون جامع «۳»

۱. گزینه‌ی (۳)

$$\int \frac{5x^2+6x}{2\sqrt{x}}dx = \int (\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 3 \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + c$$

$$= (x^2+2x)\sqrt{x} + c \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x$$

۲. گزینه‌ی (۳)

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x}(3-x) + c \Rightarrow f(x) = 3 - x$$

۳. گزینه‌ی (۱)

$$\int x(x^2+8)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{u'}(\underbrace{x^2+8}_{u})^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(x^2+8)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}(x^2+8)^{\frac{3}{2}} + c$$

۴. گزینه‌ی (۳)

$$\int e^{2Lnx}dx = \int e^{Lnx^2}dx = \int e^{\log_e x^2}dx \xrightarrow{\text{خواص لگاریتم}} a^{\log_a x} = x$$

$$= \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

۵. گزینه‌ی (۳)

مساحت زیر نمودار در بازه‌ی $x=-6$ تا $x=6$ از ما خواسته شده است.

ذوزنقه $S_1=\frac{(3+4)\times 1}{2}=\frac{7}{2}$

مثلث $S_2=\frac{6\times 2}{2}=6$

مثلث $S_3=\frac{2\times 1}{2}=1$

با توجه به اینکه S_1 و S_3 زیرمحور xها هستند باید منفی در نظر گرفته شوند.

$$\frac{-7}{2}+6-1=\frac{3}{2}$$

۶. گزینه‌ی (۳)

$$\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{\cos^2 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\,|\cos x|\,dx\xrightarrow[\substack{\frac{\pi}{2}<x<\pi\\ \cos x<0}]{\substack{0<x<\frac{\pi}{2}\\ \cos x>0}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin x\cos x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2x dx$$

$$=\frac{-1}{4}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\cos 2x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{-1}{4}(-1-1)+\frac{1}{4}(1+1)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

۷. گزینه‌ی (۲)

$$\int_0^1(x^9+3x^6\sqrt{x}+3x^4+x^{\frac{3}{2}})dx$$

$$=\int_0^1(x^9+3x^{\frac{13}{2}}+3x^4+x^{\frac{3}{2}})dx$$

$$=\frac{1}{10}x^{10}+3\times\frac{2}{15}x^{\frac{15}{2}}+3\times\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$

۸. گزینه‌ی (۱)

$$f(x)=\int_0^x\frac{3dt}{1+t^3}\Rightarrow f'(x)=1\times\frac{3}{1+x^3}=\frac{3}{1+x^3}$$

$$(f(\frac{1}{x}))'=\frac{-1}{x^2}f'(\frac{1}{x})=\frac{-1}{x^2}\times\frac{3}{1+\frac{1}{x^3}}\xrightarrow{x=2}\frac{-1}{4}\times\frac{24}{9}$$

$$=\frac{-6}{9}=\frac{-2}{3}$$

۹. گزینه‌ی (۱)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}\xrightarrow{\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x}\int\frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}dx$$

$$=\int(\underbrace{1+\tan^2 x}_{u'})(\underbrace{1+\tan x}_{u})^{-\frac{1}{2}}dx=2(1+\tan x)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=2\sqrt{1+\tan x}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)$$

۱۰. گزینه‌ی (۲)

با توجه به ریشه‌ی داخل قدرمطلق بازه را تفکیک می‌کنیم:

$$\int_{-2}^{1}\frac{3-x+1}{2}dx+\int_1^2\frac{3+x-1}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(4-x)\,dx+\frac{1}{2}\int_1^2(2+x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(4x-\frac{1}{2}x^2)\Big]_{-2}^{1}+\frac{1}{2}(2x+\frac{1}{2}x^2)\Big]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{7}{2}+10)+\frac{1}{2}(6-\frac{5}{2})=\frac{27}{4}+\frac{7}{4}=\frac{34}{4}=\frac{17}{2}$$

۱۱. گزینه‌ی (۱)

$$\frac{-1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\underbrace{-2x\sin x^2}_{u'}\underbrace{\cos^2 x^2}_{u}dx=\frac{-1}{2}\times\frac{1}{3}\cos^3 x^2\Big]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$$=\frac{-1}{6}(0-1)=\frac{1}{6}$$

۱۲. گزینه‌ی (۳)

$$f(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{x}(\underbrace{1+\tan^2 t}_{u'})(\underbrace{\tan t}_{u})^{-3}dt=\frac{(\tan t)^{-2}}{-2}\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{2\tan^2 t}\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{x}=\frac{-1}{2\tan^2 x}+\frac{1}{2\tan^2\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2\tan^2 x}+\frac{1}{2}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}f(x)=\frac{1}{\infty}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۱۳. گزینه‌ی (۳)

$$\int_0^5[\frac{x}{3}]dx\xrightarrow{\frac{x}{3}=k\Rightarrow x=3k}\int_0^3 0\,dx+\int_3^5 1\,dx$$

$$=0+1(5-3)=2$$

۱۴. گزینه‌ی (۲)

ابتدا محل تقاطع نمودار با محور xها را به دست می‌آوریم:

$$x^3-4x=0\Rightarrow x=0,x=4$$

$$\Rightarrow\int_0^2(x^3-4x)\,dx=\frac{1}{4}x^4-4\times\frac{1}{2}x^2\Big]_0^2=4-8=|-4|=4$$

۱۵. گزینه‌ی (۲)

$$(x-3)^2=-3x+9$$

$$(x-3)^2=-3(x-3)\Rightarrow(x-3)^2+3(x-3)=0$$

$$(x-3)(x-3+3)=0\begin{cases}x=3\\x=0\end{cases}$$

$$\int_a^b(y_1-y_2)\,dx=\int_0^3-3(x-3)-(x-3)^2dx$$

$$=\int_0^3(x-3)(-3-x+3)\,dx=\int_0^3(-x^2+3x)\,dx$$

$$=\frac{-1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_0^3=(-9+\frac{27}{2})-0=\frac{9}{2}=4/5$$